

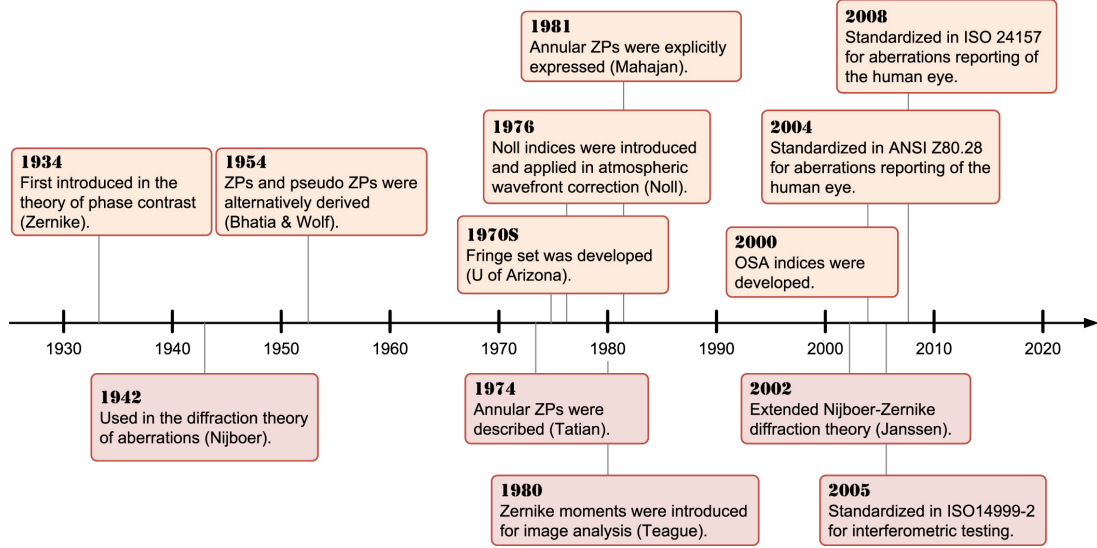
Zernike Polinomlarının Matematiksel Altyapısı ve Optik Uygulamaları

Muhammed Ali Onurlucan

Bu belge, Türkiye Ulusal Gözlemevi (TUG) bünyesindeki staj çalışmam kapsamında Zernike polinomları, matematiksel altyapıları ve optik uygulamaları üzerine tarafımdan derlenmiş ve hazırlanmış teknik notlardan oluşmaktadır. Çalışmanın teorik omurgası temel olarak Kuo Niu ve Chao Tian'ın 2022 tarihli derleme makalesine [1] dayanmaktadır.

1 Tarihçe ve Fiziksel Çıkış Noktası

- **Tarihsel Gelişim ve Nobel Ödülü:** Zernike polinomları ilk olarak 1934 yılında Frits Zernike tarafından türetilmiştir. Zernike, bu çalışmasıyla (Faz-Kontrast Mikroskobu / Phase-Contrast Microscopy) 1953 yılında Nobel Fizik Ödülü'nü kazanmıştır. Bu tarihsel süreç ve metodun optik metrolojideki evrimi Şekil 1'de özetlenmektedir.
- **Faz Kayması (Phase Shift) Problemi:** Mikroskop altında canlı hücreler incelenirken hücrelerin şeffaf yapıda olması nedeniyle ışık doğrudan geçip gitmekte, renk veya genlik değişmemektedir. Kimyasal boyalar ise hücreyi öldürdüğü için tercih edilmez. Işık hücreden geçerken genliği değişmese de ortamda yavaşlar ve bir faz kayması (Phase Shift) yaşar. Zernike, bu faz farklarını görünür kılmak için mikroskoba özel bir filtre yerleştirme fikrini geliştirdi.
- **Dairesel Geometri ve Matematiksel İhtiyaç:** Bu süreçte dalga cephesi (wavefront) analizi ihtiyacı doğdu. Klasik Fourier serileri kare veya dikdörtgen zeminlerde çalışırken daireSEL pupil sınırlarında patlamaktadır. Taylor serileri ise daireSEL bölgede dik (orthogonal) bir taban sunmaz. Zernike, daireSEL sınırlar üzerinde ortogonal olan bu polinomları türeterek sorunu çözmüştür.
- **Göz Optiği ve Çip Üretimindeki Kullanımı:** Dairesel diklik özelliği sayesinde Zernike polinomları, özellikle göz optiğinde (kornea/mercek bozuklukları) ve asimetrik çip üretiminde wavefront hatalarını tanımlamak için standart hale gelmiştir. Örneğin göz bozukluklarında;
 - $j = 4$ terimi miyop / hipermetrop (defocus) hatasını,
 - $j = 3$ ve $j = 5$ terimleri ise astigmat bozukluklarını temsil eder.



Şekil 1: Zernike polinomlarının 1934'teki ilk çıkışından itibaren optik, interferometri ve göz tıbbındaki standartlaşma tarihçesi.

2 Temel Özellikler

- **Ortogonalite (Birim Çember):** Polinomlar birim çember üzerinde diktir (Orthogonal on unit circle). Bu sayede elde edilen genişleme katsayıları terim sayısından bağımsız olarak hesaplanabilir. Toplama (+), çıkarma (-), öteleme (translation), dönme (rotation) ve ölçekleme (scaling) gibi operasyonel kolaylıklar sağlar.
- **Katsayı Hesabı:** Dalga cephesi açılımında katsayılar diklik bağıntısı sayesinde şu şekilde elde edilir:

$$W = \sum c_k Z_k \implies c_k = \frac{\langle W, Z_k \rangle}{\langle Z_k, Z_k \rangle}$$

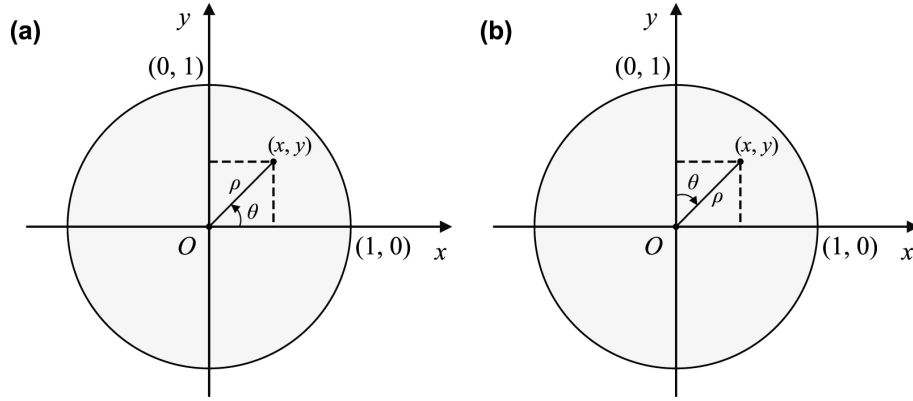
- **Fiziksel Karşılık ve Optik Anlam:** Farklı dik polinom tabanları bulunsada Zernike polinomlarının en büyük avantajı, her bir teriminin optikte doğrudan fiziksel bir aberasyona (astigmatizm, koma, küresel sapınç vb.) karşılık gelmesidir. Şekil 3'de ilk n, m derecelerine sahip temel Zernike modlarının 3 boyutlu yüzey profilleri gösterilmektedir. Bu modların deneysel interferometre ölçümlerinde nasıl bir kırınım saçak deseni oluşturduğu ise Şekil 4'nde verilmiştir. Bu doğrudan ilişki hızlı sınıflandırma (Fast Classification) ve hızlı nicelleştirme (Fast Quantification) imkânı sunar.
- **PSF (Point Spread Function) İlişkisi:** Teleskoplarda veya optik sistemlerde görüntü kalitesini belirleyen en temel unsur Point Spread Function (PSF - Sensörde oluşan leke) yapısıdır. Extended Nijboer-Zernike (ENZ) teorisi sayesinde Zernike katsayıları kullanılarak PSF kolaylıkla hesaplanabilir.
- **Wavefront Rekonstrüksiyonu:** Ölçülen wavefront eğimlerinden (gradients) yararlanılarak dalga cephesinin kendisi yeniden oluşturulabilir (Reconstruction):

$$W = \sum a_j Z_j$$

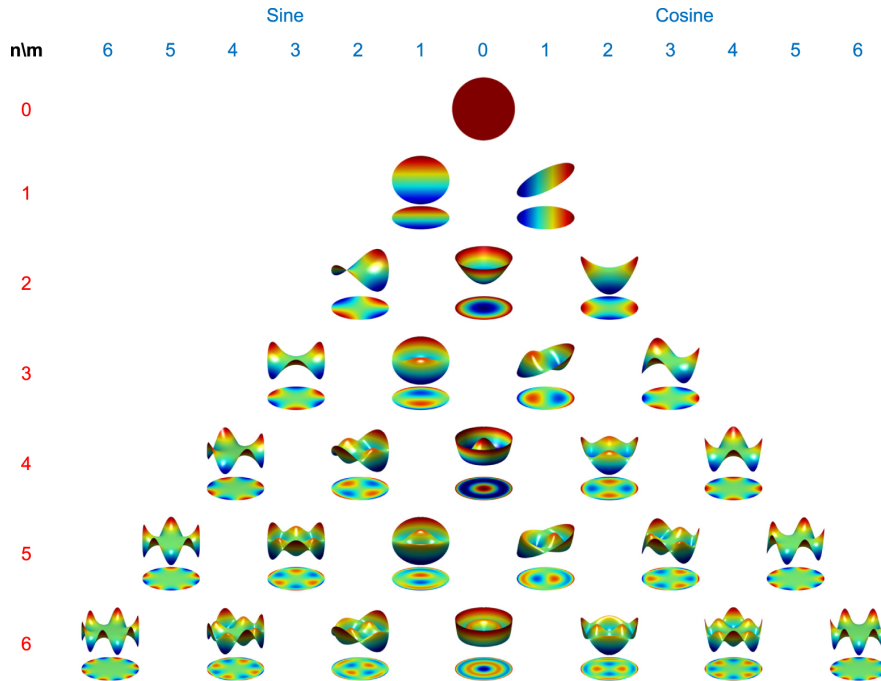
- **Kutupsal Koordinat Tanımı:** Zernike polinomları birim disk üzerinde tanımlı olup genellikle kutupsal koordinatlarda ifade edilir:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

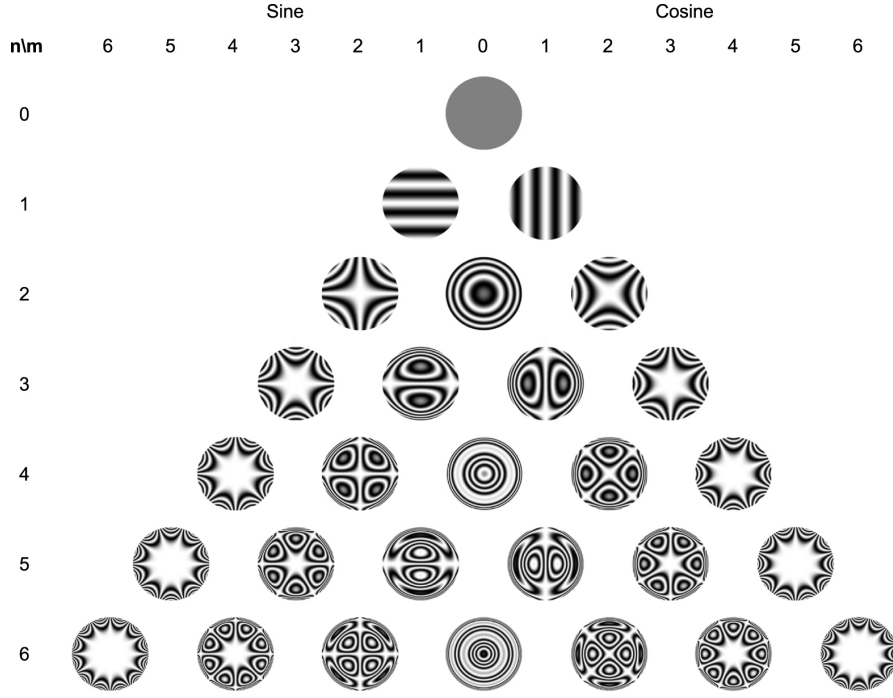
Optik literatüründe açı tanımı yapılırken eksen oryantasyonuna dikkat edilmelidir; Şekil 2’te standart $+x$ referanslı tanım ile Malacara şemasında tercih edilen saat yönlü $+y$ referanslı tanım karşılaştırılmaktadır.



Şekil 2: Birim çember üzerinde kutupsal koordinat tanımları: (a) Standart $+x$ ekseninden başlanan tanım, (b) Malacara şemasında kullanılan $+y$ ekseninden saat yönünde ölçülen tanım.



Şekil 3: İlk n, m derecelerine göre 3 boyutlu Zernike mod profilleri ve birim disk üzerindeki izdüşümleri.



Şekil 4: Farklı Zernike modlarının interferometrik girişim saçakları (Fringe patterns) olarak görünümü.

3 İndisleme Şemaları (Indexing Schemes)

Zernike polinomları iki indisle (n : radyal derece, m : açısal frekans) tanımlanır. Ancak bilgisayar yazılımlarında tek bir vektörel dizilim (j) gerektiğinden iki boyutlu (n, m) indisleri tekil bir j indeksine haritalanır. Şekil 5’nde görüleceği üzere farklı disiplinler ve yazılımlar, sıralama önceliklerine veya normalizasyon katsayılarına göre farklı j şemaları benimsemiştir. Bu şemalar arasındaki mod dizilim farklılıkları ve piramidal kaymalar ise Şekil 6’nda detaylandırılmıştır.

3.1 Noll Indexing Scheme (1976)

- **Tarihçe ve Amaç:** Zernike polinomları ilk türetildiğinde normalizasyon faktörleri açıkça belirtilmemiştir. 1976 yılında Noll, özellikle atmosferik türbülans nedeniyle oluşan wavefront bozulmalarının (distortion) analizini standartlaştırmak ve kolaylaştırmak amacıyla normalizasyon faktörlerini tanımlamıştır.
- **Gerçek Zernike Tanımı:**

$$Z_j(\rho, \theta) = Z_n^m(\rho, \theta) = \begin{cases} \sqrt{2(n+1)} R_n^m(\rho) \cos(m\theta), & m \neq 0, j \text{ çift (even)} \\ \sqrt{2(n+1)} R_n^m(\rho) \sin(m\theta), & m \neq 0, j \text{ tek (odd)} \\ \sqrt{n+1} R_n^0(\rho), & m = 0 \end{cases}$$

- **Kısıtlar ve Tanımlar:** n radyal polinomların derecesini ($R_n^m(\rho)$), m ise açısal frekansı gösterir. Şema gereği $n - m \geq 0$ ve $n - m$ çift sayı olmalıdır. j tekil sıralama indeksidir. n . dereceden lineer bağımsız polinom sayısı $(n+1)(n+2)/2$ kadardır.

- **Radyal Polinom İfadesi:**

$$R_n^m(\rho) = \sum_{s=0}^{\frac{n-m}{2}} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! \left(\frac{n+m}{2} - s\right)! \left(\frac{n-m}{2} - s\right)!} \rho^{n-2s}, \quad R_n^m(1) = 1$$

- **Diklik Koşulu (Orthogonality):**

$$\frac{\int_0^{2\pi} \int_0^1 Z_j(\rho, \theta) Z_{j'}(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho d\rho d\theta} = \delta_{jj'} \quad (j \neq j' \implies 0, \quad j = j' \implies 1)$$

- **İndis Çiftleri ve Dönüşüm:** Çift indis (n, m) fonksiyonun geometrik mod yapısını söylerken, tekil indis j katsayı dizilerini vektörel olarak tutmak için yararlıdır.

$$n = \lfloor \sqrt{2j-1} + 0.5 \rfloor - 1$$

$$j = \begin{cases} \frac{n(n+1)}{2} + 1, & m = 0 \\ \frac{n(n+1)}{2} + m, & j \text{ çift} \\ \frac{n(n+1)}{2} + m + 1, & j \text{ tek} \end{cases}$$

$$m = \begin{cases} 2 \cdot \lfloor \frac{2j+4-n(n+1)}{4} \rfloor, & n \text{ çift} \\ 2 \cdot \lfloor \frac{2(j+1)-n(n+1)}{4} \rfloor, & n \text{ tek} \end{cases}$$

- **Karmaşık Zernike Çember Polinomları (Complex Zernike circle polynomials):**

$$V_n^l(\rho, \theta) = \sqrt{n+1} R_n^l(\rho) e^{il\theta} \quad (n \geq 0, l \in \mathbb{Z}, n - |l| \geq 0 \text{ ve çift})$$

$$\frac{\int_0^{2\pi} \int_0^1 [V_n^l(\rho, \theta)]^* V_{n'}^{l'}(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho d\rho d\theta} = \delta_{nn'} \delta_{ll'}$$

3.2 OSA/ANSI Indexing Scheme

- **Kullanım Alanı:** Oftalmoloji (göz muayene sistemleri) ve mühendislik simülasyon yazılımlarında (COMSOL Ray Optics vb.) standart kabul edilir. İndisleme $j = 0$ (Piston) ile başlar.

$$Z_j(\rho, \theta) = Z_n^m(\rho, \theta) = \begin{cases} N_n^m R_n^{|m|}(\rho) \cos(m\theta), & m \geq 0 \\ N_n^m R_n^{|m|}(\rho) \sin(|m|\theta), & m < 0 \end{cases}$$

$$N_n^m = \sqrt{\frac{2(n+1)}{1 + \delta_{m0}}}$$

$$j = \frac{n(n+2) + m}{2}, \quad n = \left\lfloor \frac{-3 + \sqrt{9 + 8j}}{2} \right\rfloor, \quad m = 2j - n(n+2)$$

3.3 Fringe Indexing Scheme (1970'ler)

- Lens tasarımı ve optik metrolojide yaygındır. Genellikle 37 mod ile sınırlandırılmış özel bir sıralama dizilimi kullanır ve düşük dereceli sapınlara öncelik verir.

$$Z_j(\rho, \theta) = Z_n^m(\rho, \theta) = \begin{cases} R_n^{|m|}(\rho) \cos(m\theta), & m \geq 0 \\ R_n^{|m|}(\rho) \sin(|m|\theta), & m < 0 \end{cases}$$

3.4 ISO-14999 Indexing Scheme

- 2005 yılında ISO standart organizasyonu tarafından büyük ölçekli mercekler, askeri ve uzay optik sistemlerinin testleri için yayımlanmıştır. Matematiksel tanımı aynı olup mod sıralama mantığı farklıdır.

3.5 Born and Wolf Indexing Scheme (1950'ler)

- Klasik Born & Wolf "Principles of Optics" kitabındaki sıralamadır. Fonksiyon yapıları aynı ancak mod sıralaması (sorting) farklıdır.

3.6 Malacara Indexing Scheme

- Açının (θ) $+x$ eksenine yerine $+y$ ekseninden saat yönünde (clockwise) ölçüldüğü özel şemadır (saat kadranı mantığı istendiği için geliştirilmiştir):

$$Z_j(\rho, \theta) = Z_n^m(\rho, \theta) = \begin{cases} R_n^{|m|}(\rho) \sin(m\theta), & m > 0 \\ R_n^{|m|}(\rho) \cos(m\theta), & m \leq 0 \end{cases}$$

4 Matematiksel Özellikler

- **Radyal Diklik (Radial Orthogonality):**

$$\int_0^1 R_n^m(\rho) R_{n'}^m(\rho) \rho d\rho = \frac{1}{2(n+1)} \delta_{nn'}$$

- **Açısal Simetri (Rotational Symmetry):**

$$Z_n^m(\rho, \theta + \pi) = (-1)^m Z_n^m(\rho, \theta)$$

- **Fourier Dönüşümü (Fourier Transform):** Zernike polinomlarının iki boyutlu Fourier dönüşümü yine Bessel fonksiyonları cinsinden elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_j(u, v) &= \iint Z_j(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy \\ Z_j(r, \phi) &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 Z_j(\rho, \theta) e^{-i2\pi r \rho \cos(\theta-\phi)} \rho d\rho d\theta \\ &= \begin{cases} \sqrt{2(n+1)} (-i)^n \frac{J_{n+1}(2\pi r)}{r} \cos(m\phi), & m \neq 0, j \text{ çift} \\ \sqrt{2(n+1)} (-i)^n \frac{J_{n+1}(2\pi r)}{r} \sin(m\phi), & m \neq 0, j \text{ tek} \\ \sqrt{n+1} (-i)^n \frac{J_{n+1}(2\pi r)}{r}, & m = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- **İntegral Temsili (Integral Representation):**

$$R_n^m(\rho) = 2\pi(-i)^{\frac{n-m}{2}} \int_0^\infty J_{n+1}(2\pi r) J_m(2\pi r \rho) dr$$

- **Türev Bağlıları (Derivatives):**

$$\begin{aligned} \frac{dR_n^{|m|}(\rho)}{d\rho} &= n \left[R_{n-1}^{|m|-1}(\rho) + R_{n-1}^{|m|+1}(\rho) \right] + \frac{dR_{n-2}^{|m|}(\rho)}{d\rho} \\ \frac{\partial Z_j(\rho, \theta)}{\partial x} &= N_n^m \left[\frac{dR_n^{|m|}(\rho)}{d\rho} \Theta^{|m|}(\theta) \cos \theta - \frac{R_n^{|m|}(\rho)}{\rho} \frac{d\Theta^{|m|}(\theta)}{d\theta} \sin \theta \right] \\ \frac{\partial Z_j(\rho, \theta)}{\partial y} &= N_n^m \left[\frac{dR_n^{|m|}(\rho)}{d\rho} \Theta^{|m|}(\theta) \sin \theta + \frac{R_n^{|m|}(\rho)}{\rho} \frac{d\Theta^{|m|}(\theta)}{d\theta} \cos \theta \right] \\ \Theta^{|m|}(\theta) &= \begin{cases} \cos |m|\theta, & m \neq 0, j \text{ çift} \\ \sin |m|\theta, & m \neq 0, j \text{ tek} \\ 1, & m = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

5 Yineleme Bağlıları (Recurrence Relations)

Yüksek dereceli polinomlarda radyal denklem $R_n^m(\rho)$ içinde yer alan faktöriyeler sayısal hesaplamalarda taşmaya (overflow) yol açar. Bu sorunu aşmak için faktöriyel içermeyen yinelemeli algoritmalarından yararlanılır:

5.1 Kintner Metodu

Sabit bir m değeri için farklı radyal dereceler $(n, n-2, n-4)$ arasında üç terimli yineleme sağlar:

$$R_n^m(\rho) = \begin{cases} \rho^n, & n-m=0 \\ n\rho^n - (n-1)\rho^{n-2}, & n-m=2 \\ \frac{1}{k_1} [(k_2\rho^2 + k_3)R_{n-2}^m(\rho) + k_4R_{n-4}^m(\rho)], & n-m=4, 6, 8, \dots \end{cases}$$

katsayılar:

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{2}(n+m)(n-m)(n-2), \quad k_2 = 2n(n-1)(n-2) \\ k_3 &= -m^2(n-1) - n(n-1)(n-2), \quad k_4 = -\frac{1}{2}n(n+m-2)(n-m-2) \end{aligned}$$

5.2 Prata Metodu

Farklı radyal ve açısal indisler arasında geçiş yaparak kararlı bir sayısal hesaplama sunar:

$$R_n^m(\rho) = \begin{cases} \rho^n, & n-m=0 \\ k_1\rho R_{n-1}^{|m-1|}(\rho) + k_2R_{n-2}^m(\rho), & n-m=2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

burada $k_1 = \frac{2n}{n+m}$, $k_2 = \frac{m-n}{m+n}$.

5.3 Recursive Metod

$$R_n^m(\rho) = \begin{cases} \rho^n, & n - m = 0 \\ n\rho^n - (n-1)\rho^{n-2}, & n - m = 2 \\ k_1 R_n^{m+4}(\rho) + \left(k_1 + \frac{k_2}{\rho^2}\right) R_n^{m+2}(\rho), & n - m = 4, 6, 8, \dots \end{cases}$$

5.4 Shakibaei ve Paramesran Metodu

Polinomları türev almadan doğrudan alt indisler üzerinden bağlayan alternatif bir yineleme bağıntısıdır:

$$R_n^m(\rho) = \rho \left[R_{n-1}^{|m-1|}(\rho) + R_{n-1}^{m+1}(\rho) \right] - R_{n-2}^m(\rho)$$

6 Wavefront Fitting ve Dönüşümler

Optik sistemdeki pupil fonksiyonu, genlik $A(\rho, \theta)$ ve faz gecikmesi $W(\rho, \theta)$ cinsinden modellenir:

$$P(\rho, \theta) = A(\rho, \theta) e^{iW(\rho, \theta)}$$

Dalga cephesi hatası $W(\rho, \theta)$ Zernike bazında ifade edildiğinde:

$$W(\rho, \theta) = \sum_{j=0}^J a_j Z_j(\rho, \theta)$$

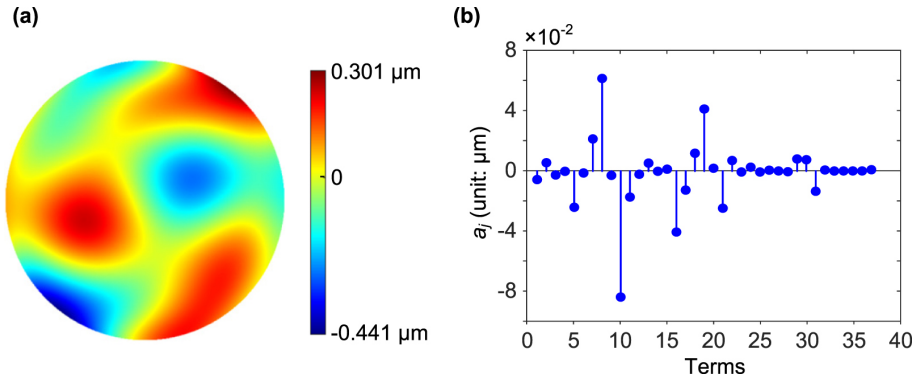
Deneysel ölçümlerden katsayılar En Küçük Kareler (Least Squares) yöntemi ile hesaplanabilir:

$$a = (A^T A)^{-1} A^T W$$

Teorik olarak sürekli integrasyon ifadesi ise şöyledir:

$$a_j = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 W(\rho, \theta) Z_j(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta$$

Şekil 7'de birim pupil üzerinde ölçülen $W(\rho, \theta)$ dalga cephesi hatası ile bu yüzeyden elde edilen a_j genişleme katsayılarının spektrumu yan yana sunulmuştur.



Şekil 7: (a) Birim çember üzerinde ölçülen dalga cephesi hatası $W(\rho, \theta)$, (b) Hesaplanan a_j Zernike genişleme katsayıları spektrumu.

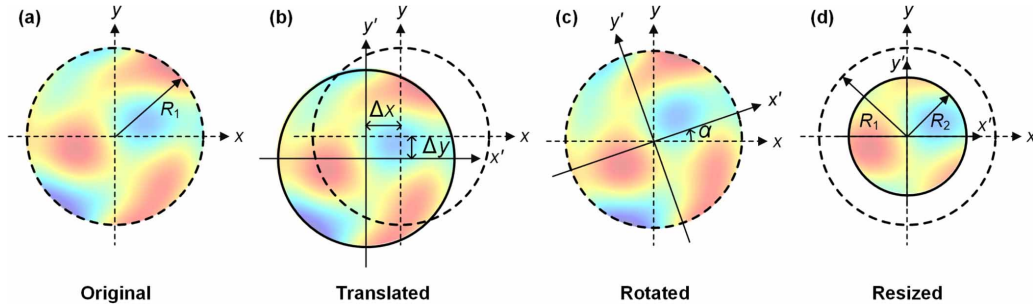
Dalga cephesinin ortalama değeri ($\overline{W}$) ve toplam varyansı (σ^2) doğrudan katsayılar üzerinden elde edilir:

$$\overline{W}(\rho, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma} W(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta = a_0 \quad (\text{Ortalama Değer / Mean Value})$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 [W(\rho, \theta) - \overline{W}(\rho, \theta)]^2 \rho d\rho d\theta = \overline{W^2} - (\overline{W})^2 = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2$$

6.1 Koordinat Dönüşümleri (Transformations)

Göz veya teleskop verisi ötelendiğinde, döndürüldüğünde veya yeniden boyutlandırıldığında Zernike katsayılarının yeni durumları türetilebilir. Şekil 8'de bir pupil üzerinde gerçekleştirilebilecek temel koordinat operasyonları (öteleme, dönme, ölçekleme) şematize edilmiştir. Bu operasyonların katsayılar düzeyinde nasıl işlendiği ve reconstructed wavefront hatasına etkisi ise Şekil 9'teki akış şemasında gösterilmektedir.



Şekil 8: Pupil üzerindeki koordinat operasyonları: (a) Orijinal pupil, (b) Öteleme ($\Delta x, \Delta y$), (c) Dönme (α), (d) Yeniden boyutlandırma (Scaling, R_2/R_1).

- **Öteleme (Translation):**

$$W(x - \Delta x, y - \Delta y) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^s W(x, y)$$

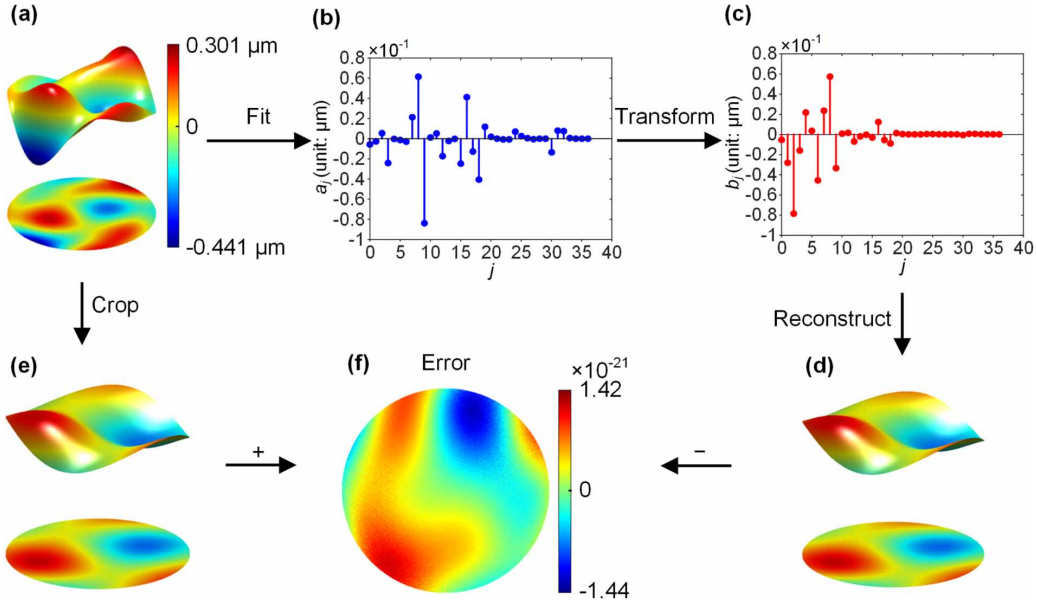
- **Dönme (Rotation):** α açısı kadar dönmeye katsayılar:

$$b_n^{-|m|} = a_n^{-|m|} \cos(|m|\alpha) + a_n^{|m|} \sin(|m|\alpha)$$

$$b_n^{|m|} = -a_n^{-|m|} \sin(|m|\alpha) + a_n^{|m|} \cos(|m|\alpha)$$

- **Ölçekleme (Resizing/Scaling):** Pupil yarıçapı R_1 'den R_2 'ye değiştiğinde ($\epsilon = R_2/R_1$):

$$W_2(\epsilon R_1 \rho, \theta) = \sum a_j Z_j(\epsilon \rho, \theta)$$



Şekil 9: Öteleme/Dönme dönüşümlerinin katsayı düzleminde ($a_j \rightarrow b_j$) hesaplanıp dalga cephesinin yeniden oluşturulması ve hata analizi akış şeması.

7 Seidel Aberasyonları ve Strehl Oranı

Zernike polinomlarından önce optik sistemlerde sapınçlar Seidel aberasyon modeli ile tanımlanmaktaydı:

- **Spherical Aberration (Küresel Sapınç):** Merceğin kenarından geçen ışınlar ile merkezinden geçenlerin farklı noktalara odaklanması.
- **Coma (Koma):** Optik eksene eğik gelen ışıkların odak düzleminde kuyruklu yıldız benzeri saçılması.
- **Astigmatism (Astigmatizma):** Yatay ve dikey eksenlerin odaklama güçlerinin birbirinden farklı olması.
- **Field Curvature (Alan Eğriligi):** Görüntünün düz bir sensör yerine içbükey/dışbükey kavisli bir yüzeye odaklanması.
- **Distortion (Bozulma):** Kenarlara doğru fıçı veya yastık şeklinde oluşan geometrik bükülmeler.

Seidel genel açılımı:

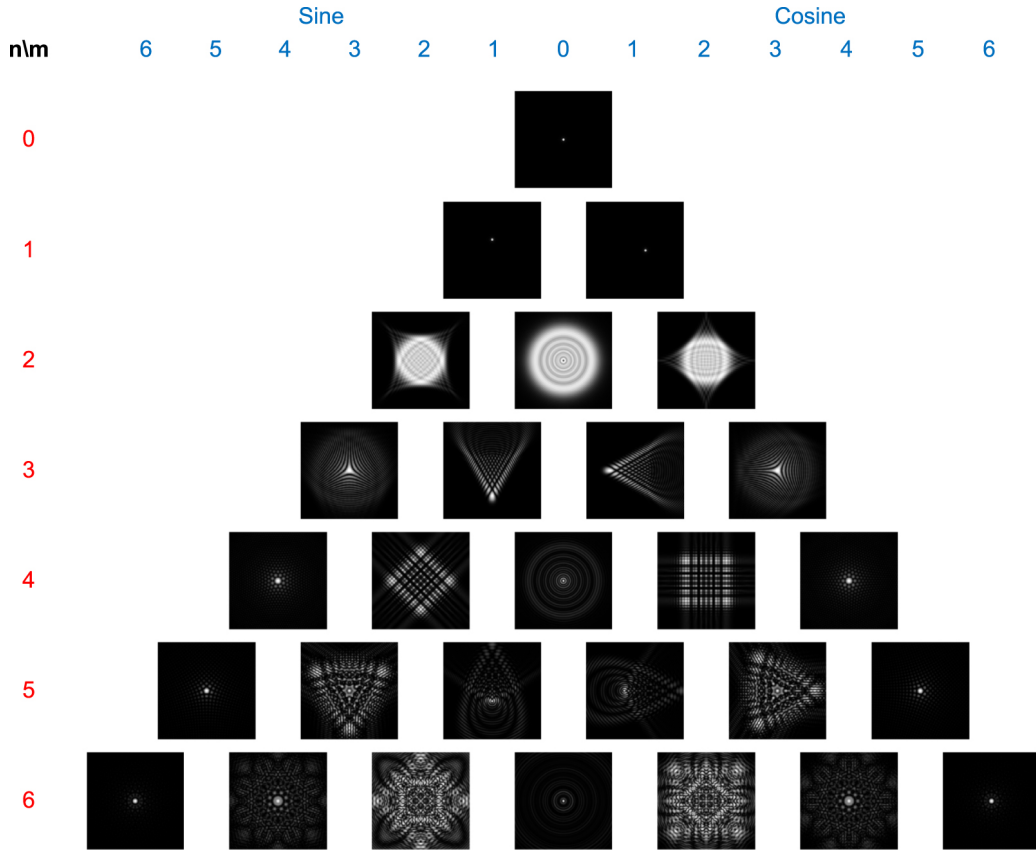
$$W(\rho, \theta) = W_{111}r\rho \cos \theta + W_{020}\rho^2 + W_{040}\rho^4 + W_{131}r\rho^3 \cos \theta + W_{222}r^2\rho^2 \cos^2 \theta + \dots$$

Sabit bir görüntü noktası için ($r = \text{sabit}$):

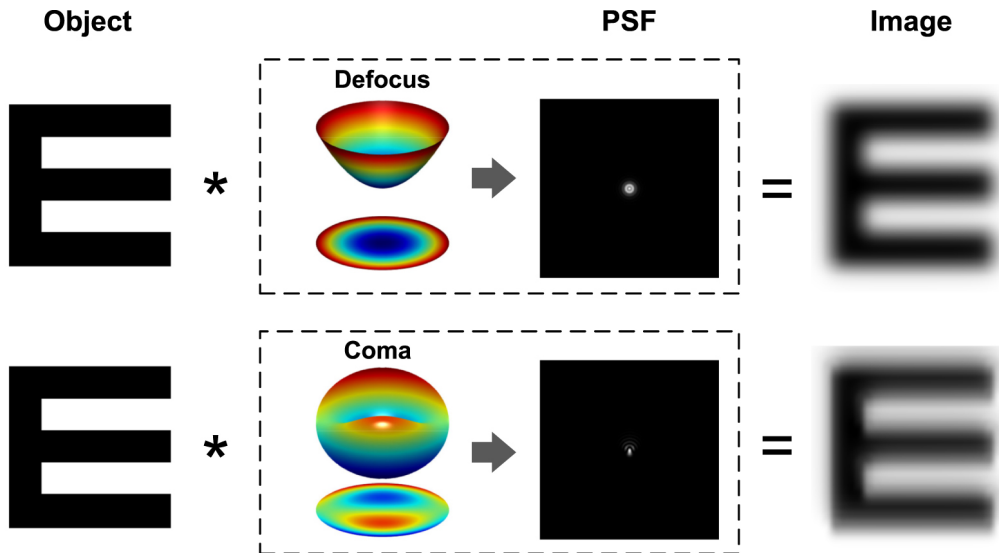
$$W(\rho, \theta) = W_{11}\rho \cos \theta + W_{20}\rho^2 + W_{22}\rho^2 \cos^2 \theta + W_{31}\rho^3 \cos \theta + W_{40}\rho^4$$

Noll şemasındaki düşük dereceli Zernike katsayıları (a_0 ila a_8), Seidel aberasyon katsayıları ile doğrudan ilişkilendirilebilir:

Her bir tekil Zernike modunun odak düzleminde oluşturduğu tekil Point Spread Function (PSF) leke yapısı Şekil 10'ndeki piramitte gösterilmiştir. Bu aberasyonlardan özellikle Defocus ve Coma modlarının ideal cisim görüntüsü üzerindeki bulanıklaştırıcı konvolüsyon etkisi ($Object * PSF = Image$) ise Şekil 11'da incelenebilir.



Şekil 10: Zernike modlarının (n, m) tekil olarak ürettiği Point Spread Function (PSF) kırınım leke kalıpları piramidi.



Şekil 11: Defocus ve Coma Zernike aberasyonlarının oluşturduğu PSF yapısı ve bu PSF'in orijinal nesne (Object) görüntüsüyle konvolüsyonu ($Object * PSF = Image$) sonucu oluşan bulanıklaşma etkisi.

Aberasyon Tipi	Zernike Katsayı Karşılığı
Piston	$a_p = a_0 - a_3 + a_8$
Tilt	$a_t = \sqrt{(a_1 - 2a_6)^2 + (a_2 - 2a_7)^2}$
Defocus	$a_d = 2a_3 - 6a_8 \pm \sqrt{a_4^2 + a_5^2}$
Astigmatism	$a_a = \mp 2\sqrt{a_4^2 + a_5^2}$
Coma	$a_c = 3\sqrt{a_6^2 + a_7^2}$
Spherical	$a_s = 6a_8$

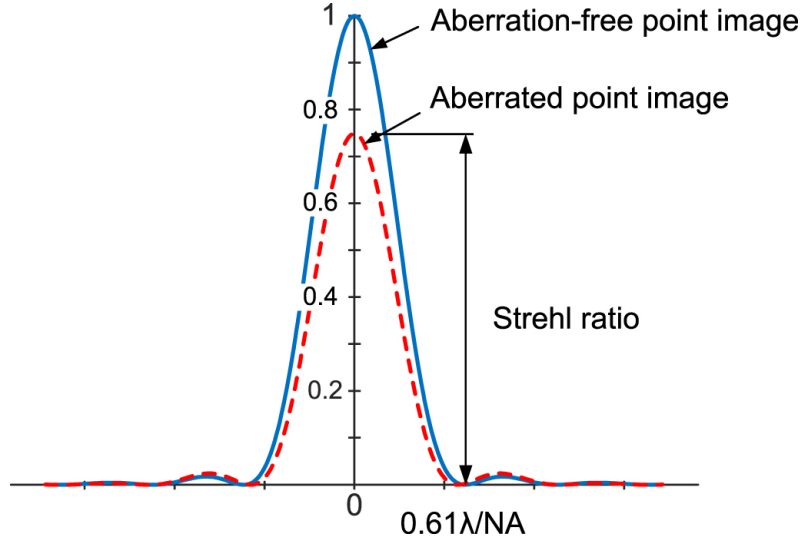
7.1 Strehl Oranı (Strehl Ratio)

Görüntü kalitesini ifade etmek için kullanılan temel metriklerden biridir:

$$\text{Strehl Ratio} = \frac{\text{Aberasyonlu Şiddet (Intensity with aberration)}}{\text{İdeal Şiddet (Intensity with ideal, no aberration)}} = \frac{I}{I_0}$$

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\pi^2} \left| \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{i2\pi W(\rho, \theta)} \rho d\rho d\theta \right|^2 \approx e^{-(2\pi\sigma)^2}$$

Şekil 12’da kusursuz (aberration-free) bir odak lekesinin tepe şiddeti ile aberasyonlu bir lekenin dikey eksendeki düşüş oranı grafiksel olarak gösterilmektedir.

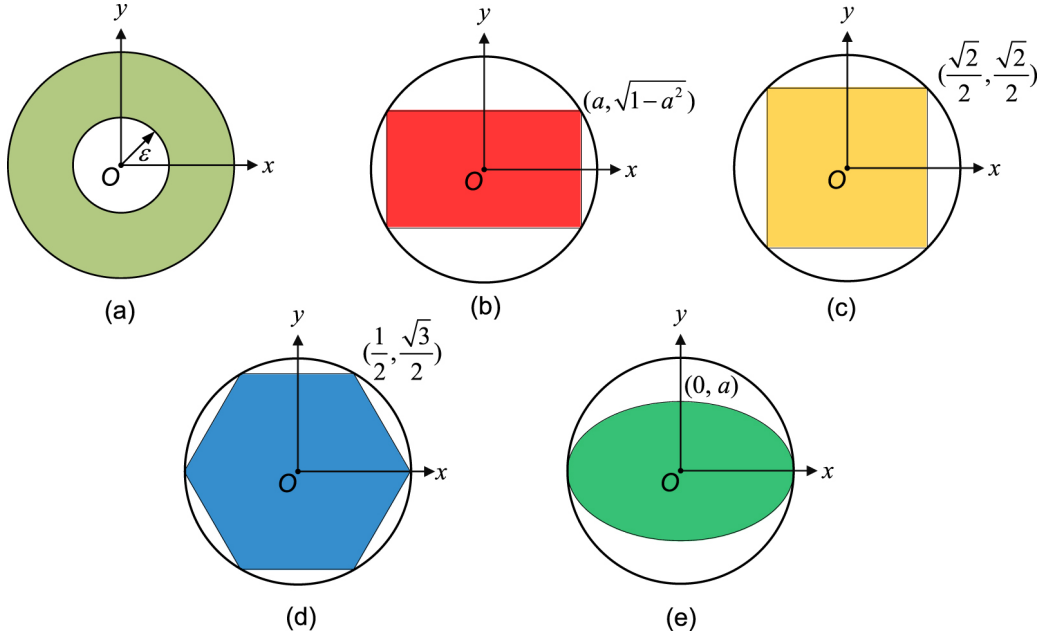


Şekil 12: Sapıncsız (Aberration-free) ideal nokta görüntüsü ile aberasyonlu nokta görüntüsünün tepe şiddet oranını gösteren Strehl oranı metriği.

- Eğer Strehl oranı $S \geq 0.8$ ise sistem "Diffraction-limited" (kırınım ile sınırlı, optik açıdan kusursuz) kabul edilir (Maréchal Kriteri).
- Odak merkezindeki lekenin etrafında oluşan kırınım halkalarına Airy Disk adı verilir.

8 Farklı Pupil Geometrilerinde Zernike Polinomları

Optik sistemlerde pupil her zaman tam bir dairesel disk şeklinde olmayabilir; Şekil 13’nde birim çember içerisine teğet veya içten yerleştirilmiş halka (annular), dikdörtgen, kare, altıgen ve eliptik açıklık geometrileri gösterilmektedir.

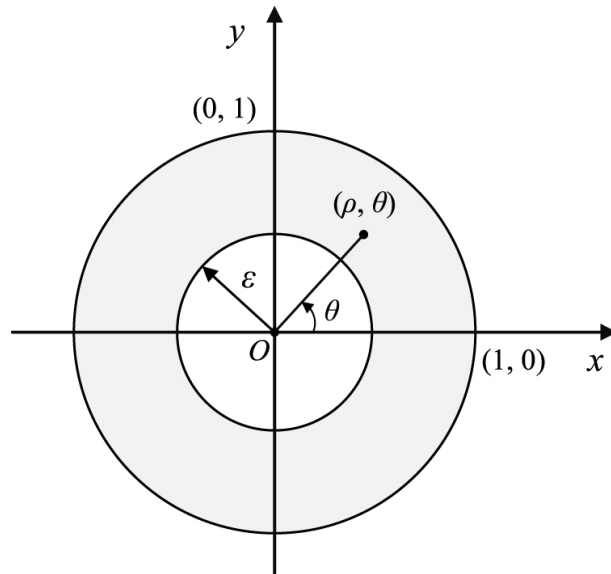


Şekil 13: Birim çember içerisine teğet/içten yerleştirilmiş farklı pupil geometrileri: (a) Annular/Halka, (b) Dikdörtgen, (c) Kare, (d) Altıgen, (e) Eliptik.

- Dairesel olmayan bu pupiller üzerinde dikliği (orthogonality) korumak için Gram-Schmidt dikleştirme yöntemi uygulanarak yeni ortogonal taban fonksiyonları F_j elde edilir.

8.1 Annular (Halka) Pupillerde Zernike Polinomları

Merkezinde ikincil ayna tıkanması (obscuration) bulunan teleskoplarda pupil, Şekil 14'de gösterildiği gibi $\epsilon \leq \rho \leq 1$ aralığındaki bir halkadır. Bu bölgede ortogonalliği korumak için radyal polinomlar $R_n^m(\rho; \epsilon)$ şeklinde ϵ parametresine bağlı olarak Gram-Schmidt yöntemiyle yeniden türetilir:

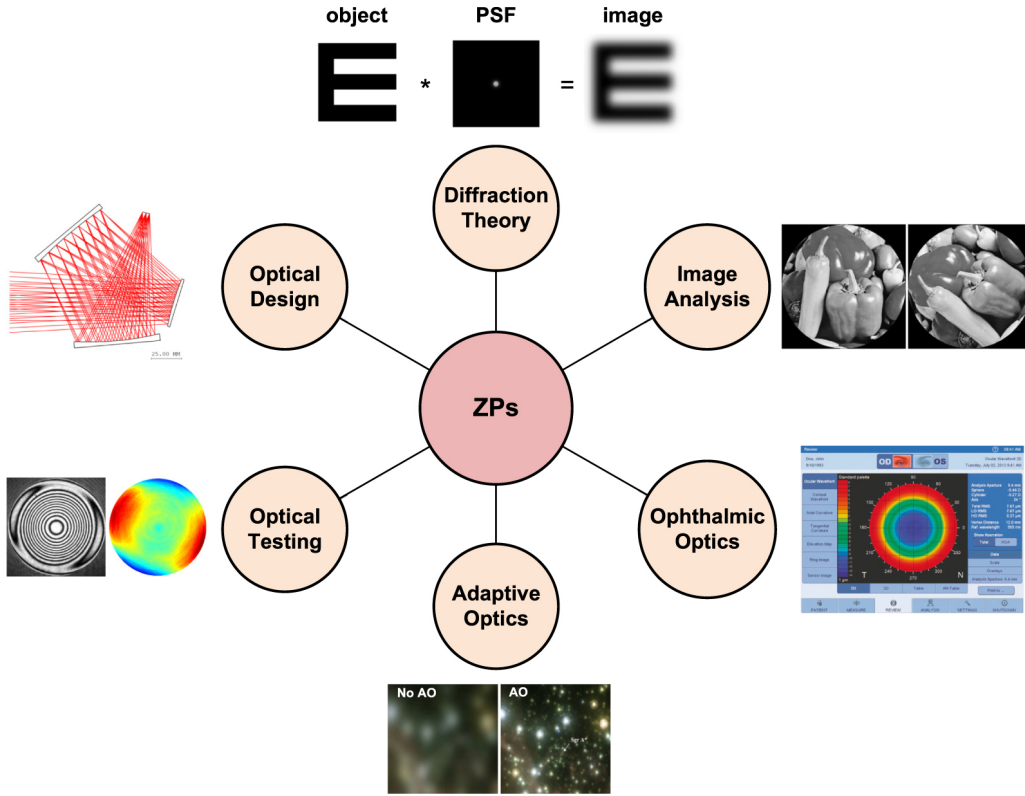


Şekil 14: Merkez tıkanma oranı ϵ olan halka (annular) pupil tanımı ($\epsilon \leq \rho \leq 1$).

$$Z_j(\rho, \theta; \epsilon) = Z_n^m(\rho, \theta; \epsilon) = \begin{cases} \sqrt{2(n+1)} R_n^m(\rho; \epsilon) \cos(m\theta), & m \neq 0, j \text{ çift} \\ \sqrt{2(n+1)} R_n^m(\rho; \epsilon) \sin(m\theta), & m \neq 0, j \text{ tek} \\ \sqrt{n+1} R_n^0(\rho; \epsilon), & m = 0 \end{cases}$$

9 Uygulamalar ve Yazılım Kullanımları

Zernike polinomları optik tasarım, wavefront analizi ve görüntü kalitesi iyileştirme süreçlerinde geniş bir kullanım alanına sahiptir. Şekil 15’nde bu teorik yapının optik testlerden göz tıbbına ve astronomiye kadar uzanan disiplinler arası haritası sunulmuştur.



Şekil 15: Zernike polinomlarının disiplinler arası ana kullanım alanları: Optik tasarım, kırınım teorisi, görüntü analizi, göz optiği, adaptif optik ve optik test/interferometri.

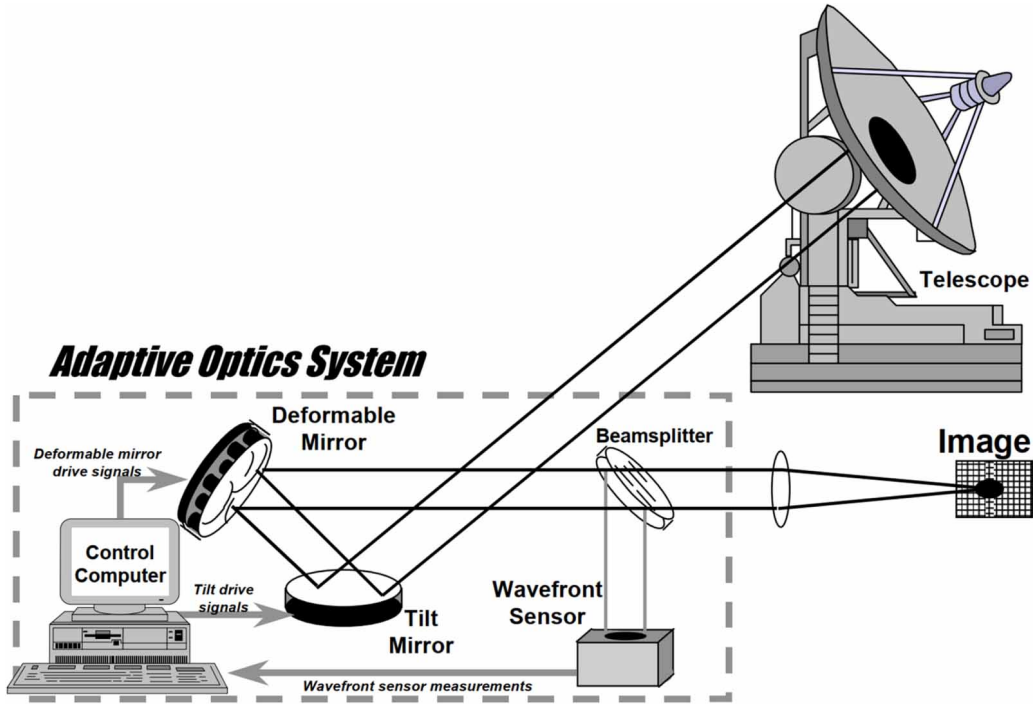
- **Optik Tasarım (Optical Design):** Zemax ve CODE V gibi ticari yazılımlarda Zernike polinomları asferik yüzey üzerine mikro-deformasyon katmanını eklemek için kullanılır:

$$Z = \frac{cr^2}{1 + \sqrt{1 - (1+k)c^2r^2}} + \sum a_j r^{2j} + \sum a_j Z_j(\rho, \theta)$$

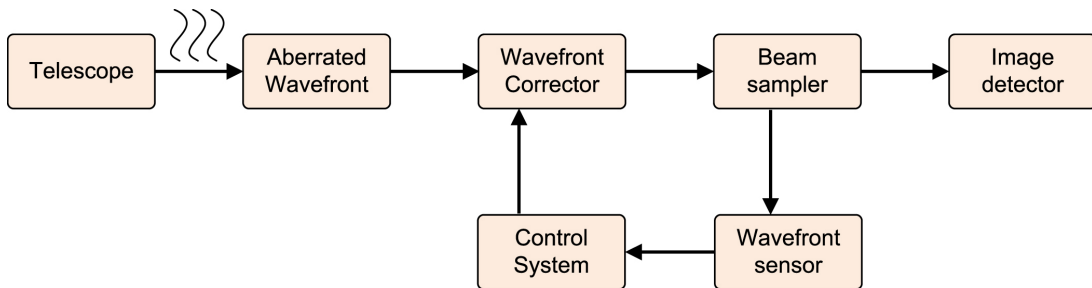
- **Optik Test ve İnterferometri:** Fizeau, Mach-Zehnder ve Twyman-Green interferometrelerinde faz haritaları çıkarılır.

- Girişim deseni şiddeti: $I(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos(\phi(x, y))$
- Denklemden 3 bilinmeyen olduğu için en az 3 veya 4 faz kaydırmalı görüntü (Phase-shifting interferometry) gerekir.

- Hesaplanan faz haritası arctan tanımı gereği $[-\pi, \pi]$ aralığında kırılarak (Wrapped Phase) elde edilir. Ardından Phase Unwrapping algoritması ile sürekli faz haritasına dönüştürülür.
- **Adaptif Optik (Adaptive Optics):** Teleskoplarda atmosferik türbülansı gerçek zamanlı olarak düzeltmek amacıyla Shack-Hartmann sensöründen alınan veriler Zernike katsayılarına dönüştürülür ve deforme edilebilir aynaya (Deformable Mirror) aktarılır. Bu donanımsal altyapı Şekil 16'de; sensör, bilgisayar ve aynanın beraber çalıştığı kapalı döngü (closed-loop) kontrol yapısı ise Şekil 17'deki blok diyagramda gösterilmektedir.



Şekil 16: Teleskoplarda kullanılan gerçek zamanlı Adaptif Optik (AO) sisteminin donanımsal bileşenleri: Teleskop optiği, Wavefront Sensörü, Kontrol Bilgisayarı, Tilt Ayna ve Deforme Edilebilir Ayna (Deformable Mirror).



Şekil 17: Adaptif Optik kapalı döngü (closed-loop) kontrol sisteminin blok diyagramı.

10 Sınırlılıklar ve Problemler

- Polinomlar sadece birim dairesel disk üzerinde diktir; kare veya eliptik pupillerde diklik kaybolur (yeniden ortogonalize edilmelidir).
- Teorik olarak sürekli ortam varsayarlar; ancak sensör matrislerinden gelen gerçek veriler ayrık (discrete) noktalardan oluşur.
- Pupil yarıçapı değiştiğinde katsayıların tamamı yeniden hesaplanmalıdır (katsayılar ölçeğe bağımlıdır).
- Çok yüksek frekanslı veya keskin karmaşık yüzey bozulmalarında terim sayısı yetersiz kalabilir veya sayısal taşmalar yaşanabilir.

Kaynaklar

- [1] K. Niu ve C. Tian, “Zernike polynomials and their applications,” *Journal of Optics*, c. 24, s. 12, p. 123001, 2022. DOI: [10.1088/2040-8986/ac9e08](https://doi.org/10.1088/2040-8986/ac9e08).